MATHEMATIQUES

Durée : 3 H

(EPREUVE COMMUNE)

– I –

1) Calculer, pour tout $R > 0$, l'intégrale

$$K_R = \int_0^R u\, e^{-u^2/2}\, du$$

ainsi que sa limite lorsque R tend vers $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Calculer, pour tout $R > 0$, l'intégrale double

$$I_R = \iint_{D_R} f(x)\, f(y)\, dx\, dy \quad \text{où} \quad D_R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$

3) Considérant l'intégrale

$$J_R = \iint_{[-R,R]\times[-R,R]} f(x)\, f(y)\, dx\, dy \;, \forall\, R > 0,$$

montrer que $I_R \leq J_R \leq I_{R\sqrt{2}}$.

4) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ est absolument convergente et déterminer, à l'aide des résultats précédents, sa valeur.

5) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx$ est absolument convergente.

Déterminer m_0 et m_1 et établir une relation de récurrence entre m_n et m_{n+2}.
En déduire la valeur de m_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{tx} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

7) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $m(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \frac{t^k}{k!}$.

– II –

1) n désignant un entier positif donné et ϕ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi_n(t) = \int_{-n}^{n} f(x) \cos tx \, dx$$

avec $f(x)$ telle qu'elle est définie au I.2).

démontrer que, quels que soient les réels t_0 et k, on a :

$$| \phi_n(t_0 + k) - \phi_n(t_0) | \leq \lambda \int_0^n f(x) \, | \sin \alpha x | \, dx$$

où λ et α sont des constantes réelles que l'on déterminera.

En déduire la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ de ϕ_n.

2) a) Prouver que, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos tx \, dx \quad \text{est convergente.}$$

b) Montrer que la suite de fonctions ϕ_n converge uniformément vers la fonction ϕ sur un intervalle que l'on précisera.

c) La fonction ϕ est–elle continue sur $\mathbb{R}$?

3) a) t_0 étant un réel donné, déterminer les coefficients a_k tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad : \quad \cos (t_0 x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

b) En déduire que $\phi_n(t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-n}^{n} g_k(x)\, dx$ où g_k est une fonction que l'on exprimera à l'aide de f.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p \to +\infty} \int_{-n}^{n} \sum_{k=p+1}^{+\infty} g_k(x)\, dx = 0$

5) En déduire que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$: $\phi(t_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k \frac{(it_0)^k}{k!}$.

Calculer la somme de cette série.

- III -

Soit E l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies et continues sur $\mathbb{R}$, et telles que l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |f(x)|^2\, dx \quad \text{soit convergente.}$$

1) Montrer que, si f et g sont 2 éléments de E, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x^2}\, dx$ est absolument convergente.

En déduire que la loi d'addition des fonctions et la loi de multiplication d'une fonction par un scalaire complexe munissent E d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

2) Vérifier que l'application qui, à tout couple (f, g) d'éléments de E, associe le nombre $< f, g >$

$$< f, g > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, e^{-x^2}\, dx$$

définit un produit scalaire hermitien sur E.

La norme de tout élément f de E est alors définie par : $\| f \| = \sqrt{< f, f >}$.

3) Soit, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $h_{t_0} : x \mapsto \cos(t_0 x)$.

Prouver que h_{t_0} est un élément de E.

Calculer, pour tout couple (t_0, t_1) de réels, le produit scalaire $< h_{t_0}, h_{t_1} >$. Donner, pour tout $t_0 \in \mathbb{N}$, la valeur de $\| h_{t_0} \|$.

4) Soit U la fonction $x \mapsto U(x) = e^{-x^2}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathrm{N}^*$, la fonction $P_n : x \mapsto P_n(x) = e^{x^2}\, U^{(n)}(x)$ [où $U^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de U] est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

Calculer le coefficient du terme de plus haut degré dans $P_n(x)$.

5) Calculer pour tout couple (n,k) d'entiers naturels tels que $n \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, P_n(x)\, x^k\, dx$.

(On envisagera les cas $k < n$ et $k \geq n$).

6) On étend à N la suite des fonctions polynomiales P_n, en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_0(x) = 1$.

Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est une suite d'éléments de E orthogonale et calculer pour tout $n \in \mathrm{N}$ $\| P_n \|^2$.